

Exercices – Séquence n° 13 – FONCTIONS (V) :

primitives, équations différentielles

Contenus	• Équation différentielle $y' = f$. • Notion de primitive d'une fonction continue sur un intervalle. • Deux primitives d'une même fonction continue sur un intervalle diffèrent d'une constante. • Primitives des fonctions de référence $x \mapsto x^n$ pour $n \in \mathbb{Z}$, $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$, exponentielle, sinus, cosinus. • Équation différentielle $y' = ay$ où a est un réel ; allure des courbes. • Équation différentielle $y' = ay + b$.
Capacités	• Calculer une primitive en utilisant les fonctions de référence et les fonctions de la forme $(v' \circ u) \times u'$. • Pour une équation différentielle $y' = ay + b$ ($a \neq 0$) : déterminer une solution particulière constante ; utiliser une solution pour déterminer toutes les solutions. • Pour une équation différentielle $y' = ay + f$: à partir de la donnée d'une solution particulière, déterminer toutes les solutions. • Exemple d'algorithme : résolution par la méthode d'Euler de $y' = f$ et $y' = ay + b$.

COMPÉTENCES :**Ch :** CHERCHER**Mo :** MODÉLISER**Re :** REPRÉSENTER**Ra :** RAISONNER**Ca :** CALCULER**Co :** COMMUNIQUER

Primitives et équations différentielles $y' = f$

Exercice 1 [Ca-Co]

Dans chacun des cas, déterminer toutes les primitives F de la fonction f définie sur l'intervalle I .

1) $f(x) = 2x^2 - x + 7$ sur $I = \mathbb{R}$.

2) $f(x) = \frac{2}{x} - \frac{1}{x^3} - \frac{1}{3\sqrt{x}} + e^{-2x}$ sur $I =]0; +\infty[$.

3) $f(x) = (2x + 1)(x^2 + x + 5)$ sur $I = \mathbb{R}$.

4) $f(x) = \frac{x^2}{(x^3 - 1)^2}$ sur $I =]1; +\infty[$.

5) $f(x) = (2x + 3)^3 - 1$ sur $I = \mathbb{R}$.

6) $f(x) = (x + 1)e^{x^2 + 2x}$ sur $I = \mathbb{R}$.

7) $f(x) = \frac{2}{\sqrt{2x-1}}$ sur $I =]\frac{1}{2}; +\infty[$.

8) $f(x) = \frac{6x-3}{\sqrt{x^2-x}}$ sur $I =]1; +\infty[$.

9) $f(x) = \frac{x^3}{2 + 3x^4}$ sur $I = \mathbb{R}$.

10) $f(x) = \frac{e^x}{(3e^x + 1)^5}$ sur $I = \mathbb{R}$.

Exercice 2 [Ca-Co]

Dans chacun des cas, vérifier que la fonction f définie sur l'intervalle I est solution de l'équation différentielle.

1) $y' = \frac{-x^2 + 2x + 1}{(x^2 + 1)^2}$; $f(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$; sur $I = \mathbb{R}$.

2) $y' = \frac{\ln(x)}{x}$; $f(x) = \frac{1}{2}(\ln(x))^2 - 7$; sur $I =]0; +\infty[$.

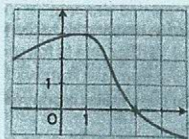
Exercice 3 [Ra-Ca-Co]

Voici un écran d'un logiciel de calcul formel :

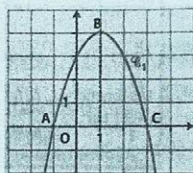
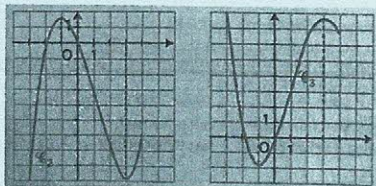
$$1 \quad \text{Dérivée} \left(\frac{x^3}{3} \left(-\frac{1}{3} + \ln(x) \right) \right)$$

$$\text{Développer: } x^2 \ln(x)$$

- Justifier l'affichage obtenu.
- En déduire une primitive sur $]0; +\infty[$ de $f : x \mapsto 5x^2 \ln(x) + 3x$.
- Déterminer la primitive sur $]0; +\infty[$ de f valant 2 en 1.

Exercice 4 [Ra-Ca-Co] g est la fonction définie sur $[-2; 5]$ par la courbe ci-contre.Déterminer le sens de variation d'une primitive de g sur $[-2; 5]$.**Exercice 5** [Ra-Ca-Co] h est une fonction définie sur $[-3; 4]$ représentée graphiquement par la courbe $\mathcal{C}_h$ ci-contre.Les points $A(-1; 0)$, $B(1; 4)$ et $C(3; 0)$ appartiennent à la courbe $\mathcal{C}_h$.

Parmi les deux courbes suivantes, laquelle représente une primitive H de la fonction h sur $[-3; 4]$? Justifier soigneusement.

**Exercice 6** [Ra-Ca-Co]

Les trois questions suivantes sont indépendantes.

- Démontrer que les fonctions : $x \mapsto \ln(5x)$; $x \mapsto 1 + \ln(x)$; $x \mapsto 3 - \ln\left(\frac{e}{x}\right)$ sont solutions sur $]0; +\infty[$ d'une même équation différentielle $y' = f$.
- Soient F et G les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = \frac{8-e^x}{e^x+2}$ et $G(x) = \frac{-5e^x}{e^x+2} + 3$.
Sans calcul de dérivée, démontrer que F et G des primitives d'une même fonction sur $\mathbb{R}$.
- Soient H et K les fonctions définies sur $]2; +\infty[$ par : $H(x) = \frac{x^2+3x-1}{x-2}$ et $K(x) = \frac{x^2+7x}{x-2}$.
Sans calcul de dérivée, déterminer si H et K sont des primitives d'une même fonction sur $]2; +\infty[$.

Exercice 7 [Ca-Co]Dans chacun des cas, déterminer la primitive F de la fonction f définie sur l'intervalle I vérifiant la condition indiquée.

- | | |
|--|--|
| 1) $f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)(x^2 - x + 4)^5$ sur $I = \mathbb{R}$ et $F(1) = 0$. | 5) $f(x) = \frac{9e^{3x}}{\sqrt{e^{3x} + 4}}$ sur $I = \mathbb{R}$ et F s'annule en -1 . |
| 2) $f(x) = 5e^x(3e^x + 1)^2$ sur $I = \mathbb{R}$ et $F(0) = 0$. | 6) $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$ sur $I =]0; +\infty[$ et $F(e) = 1$. |
| 3) $f(x) = 0,5xe^{-x^2}$ sur $I = \mathbb{R}$ et $F(1) = -4$. | 7) $f(x) = \frac{1}{x \ln(x)}$ sur $I =]1; +\infty[$ et $F(e) = 0$. |
| 4) $f(x) = \frac{x+1}{x^2+2x+3}$ sur $I = \mathbb{R}$ et $F(-1) = 2$. | |

Exercice 8 [Ca-Co]

On considère les quatre fonctions suivantes :

- f est définie sur $]-1; +\infty[$ par $f(x) = \frac{2x+5}{x+1}$;
- g est définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = \frac{x^2-5x+4}{x^2}$;
- h est définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \frac{1}{(e^x+1)^2}$;
- k est définie sur $]-1; 0[$ par $k(x) = \frac{1}{x(x+1)^2}$.

Les questions suivantes sont indépendantes.

- 1) a. Démontrer que pour tout x de $]-1; +\infty[$, $f(x) = 2 + \frac{3}{x+1}$.
b. En déduire la primitive F de f sur $]-1; +\infty[$ qui s'annule en 1.
- 2) Déterminer une primitive de g sur $]0; +\infty[$.
- 3) a. Démontrer que pour tout réel x , $h(x) = 1 - \frac{e^x}{e^x+1} - \frac{e^x}{(e^x+1)^2}$.
b. En déduire la primitive H de h sur $\mathbb{R}$ telle que $H(0) = 1$.
- 4) a. Déterminer les nombres réels a , b et c tels que pour tout x de $]0; 1[$, $k(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{1+x} + \frac{c}{(1+x)^2}$.
b. En déduire toutes les primitives de k sur $]0; 1[$.

Exercice 9 [Ra-Ca-Co]

f et F sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 4x^2 e^{2x}$ et $F(x) = (ax^2 + bx + c)e^{2x}$, où a , b et c sont des réels.

- 1) Déterminer des nombres réels a , b et c tels que pour tout réel x , $F'(x) = f(x)$.
- 2) En déduire toutes les primitives de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 10 [Ra-Ca-Co]

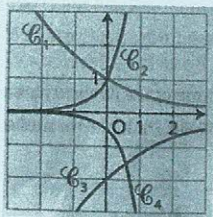
g est fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = e^{2x} \sin(x)$.

- 1) Déterminer des nombres réels a et b tels que pour tout réel x , $g(x) = ag'(x) + bg''(x)$, où a et b sont des réels.
- 2) En déduire toutes les primitives de g sur $\mathbb{R}$.

Équations différentielles $y' = ay + b$ ou $s'y$ ramenant**Exercice 11** [Re-Ra-Ca-Co]

Les questions suivantes sont indépendantes.

- Dans chaque cas, résoudre l'équation différentielle dont les solutions sont des fonctions définies sur $\mathbb{R}$.
a) $y' = 5y$ b) $2y' = -5y$ c) $-\theta' + 2\theta = 0$ d) $u' = u$.
- Déterminer la solution f , définie sur $\mathbb{R}$, de l'équation différentielle $y' + \frac{1}{4}y = 0$ vérifiant $f(3) = -1$.
- g est la solution, définie sur $\mathbb{R}$, de l'équation différentielle $y' = 3y$ telle que $g'(1) = 2$.
Justifier que $g(1) = \frac{2}{3}$, puis déterminer la fonction g .
- h est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 5e^{-4x}$.
Déterminer l'équation différentielle de la forme $y' = ay$ dont h est une solution.
- Dans le repère ci-contre, on a tracé des courbes qui représentent des fonctions solutions d'équations différentielles du type $y' = ay$.
Associer chacune de ces quatre courbes à l'équation différentielle
(E₁) : $y' = 2y$ ou (E₂) : $y' + 0,5y = 0$.

**Exercice 12** [Ra-Ca-Co]

Dans chaque cas, justifier l'affichage obtenu sur l'écran du logiciel de calcul formel.

Affichage 1	Affichage 2
<pre>1 RésolEquaDiff(y' = 3y + 7) → y = c1 e^{3x} - 7/3</pre>	<pre>1 RésolEquaDiff(5y' + y = 2, (0, 4)) → y = 2 e^{-1/5 x} + 2</pre>

Exercice 13 [Ra-Ca-Co]

Les questions suivantes sont indépendantes.

- Résoudre l'équation différentielle $y' = -3y + 4$.
- Déterminer la solution g , définie sur $\mathbb{R}$, de l'équation différentielle $3y' + 6 = 4y$ vérifiant $g(-3) = 2$.
- Déterminer la solution h , définie sur $\mathbb{R}$, de l'équation différentielle $y' + 2y = -1$ vérifiant $h'(0) = -1$.

Exercice 14 [Mo-Ra-Ca-Co]

Pour déterminer l'âge de résidus organiques, on utilise la méthode basée sur la désintégration radioactive. Les êtres vivants absorbent et assimilent du carbone de l'atmosphère.

On considère que leur organisme comporte une proportion constante de carbone 14.

Après leur mort, cette proportion diminue lentement.

- m est la fonction qui donne la masse résiduelle $m(t)$, en g, de carbone 14 dans l'échantillon à la date t , en siècle.
- La vitesse de désintégration $m'(t)$ du carbone 14 à la date t est proportionnelle à la masse à cet instant. Ainsi, il existe un réel C tel que $m'(t) = C \times m(t)$.
- Un corps organique contenait une masse m_0 de carbone 14 à l'instant $t = 0$ de sa mort.

- 1) Exprimer $m(t)$ en fonction de C et de m_0 .
- 2) On sait que la masse de carbone 14 dans un échantillon diminue de 1,24 % par siècle. En déduire la valeur de C .
- 3) Aujourd'hui, ce corps organique ne contient plus que 14 % de sa masse m_0 de carbone 14. Déterminer l'âge de ce corps. Arrondir au centième.

**Exercice 15** [Ra-Ca-Co]

En 1980, 10 000 ménages vivant en France étaient équipés d'un ordinateur.

On note $f(t)$ le nombre de ces ménages, en million, t années après 1980 ($t \geq 0$).

Le modèle de Verhulst (mathématicien Belge - 19^{ème} siècle) estime que sur la période 1980-2020, f est solution sur $[0; 40]$ de l'équation différentielle (E₁) : $y' = 0,022y(20 - y)$.

- 1) On pose $u = \frac{1}{f}$.

Démontrer que f est solution de (E₁) si, et seulement si, u est solution sur $[0; 40]$ de l'équation différentielle (E₂) : $y' = -0,44y + 0,022$.

- 2) Déterminer l'ensemble des solutions de (E₂).
- 3) En déduire l'ensemble des solutions de (E₁).

- 4) Démontrer alors que la fonction f est définie sur $[0; 40]$ par $f(t) = \frac{20}{1 + 1999e^{-0,44t}}$.

- 5) D'après l'INSEE, en 2014, la France comptait 28 765,9 milliers de ménages dont 78,8 % étaient équipés d'un ordinateur. L'estimation faite par le modèle de Verhulst est-elle correcte ? Pourquoi ?

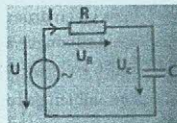
**Exercice 16** [Re-Ra-Ca-Co]

Un circuit électrique comprend un générateur de force électromotrice E , un condensateur de capacité C et un conducteur ohmique de résistance R .

$q(t)$ est la charge du condensateur, en farad, t secondes après avoir établi le courant dans le circuit.

On sait alors que la fonction q vérifie : $q' + \frac{1}{RC}q = \frac{E}{R}$.

- 1) Déterminer l'ensemble des solutions sur $[0; +\infty[$ de l'équation différentielle $q' + \frac{1}{RC}q = \frac{E}{R}$.
- 2) On suppose que la charge initiale du condensateur est nulle, c'est-à-dire $q(0) = 0$. Exprimer, pour tout réel t de $[0; +\infty[$, $q(t)$ en fonction de t .
- 3) Déterminer la charge maximum Q du condensateur sachant que celle-ci est la limite de la fonction q en $+\infty$.
- 4) On note $T = RC$. À quel pourcentage de sa charge maximum Q le condensateur est-il chargé après une durée de charge égale à T ? Et après une durée de charge égale à $5T$? Arrondir à l'unité.



Exercice 17 [Ra-Ca-Co]

Un chariot de masse 200 kg se déplace à partir d'une origine O sur une voie rectiligne et horizontale. $x(t)$ est la distance, en mètre, qui sépare le chariot de l'origine en fonction du temps t , en seconde ($t \geq 0$). D'après les lois de Newton, la fonction x vérifie (E₁) : $200x'' + 25x' = 50$ où x'' est la dérivée de la fonction dérivée x' par rapport au temps t .



- 1) Déterminer $x(0)$.
- 2) $v(t)$ est la vitesse du chariot à l'instant t et vérifie $v(t) = x'(t)$.
 - a. Démontrer que x est solution de (E₁) si, et seulement si, v est solution de (E₂) : $v' = -0,125v + 0,25$.
 - b. Résoudre sur $[0; +\infty[$ l'équation (E₂).
 - c. En déduire la vitesse $v(t)$ du chariot pour tout réel positif t , sachant que sa vitesse initiale est supposée nulle.
 - d. Étudier la limite de v en $+\infty$ et interpréter le résultat.
- 3) Démontrer alors que la fonction x est définie sur $[0; +\infty[$ par $x(t) = 2t - 16 + 16e^{-0,125t}$.
- 4) Quelle est la distance, en m, parcourue par le chariot au bout de 30 secondes ? Arrondir au dixième.

Exercice 18 [Mo-Ra-Ca-Co]

Un parachutiste chutait à une vitesse de 66 m.s^{-1} avant d'ouvrir son parachute. $v(t)$ est sa vitesse de chute, en m.s^{-1} , t secondes après l'ouverture du parachute. Les frottements de l'air croissent rapidement avec la vitesse, et pour tout réel $t \geq 0$, $v'(t) + \frac{g}{36}v^2(t) = g$ où g est la constante gravitationnelle ($g \approx 9,81$).



- 1) f est la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(t) = \frac{1}{v(t) - 6}$.
 - a. Exprimer $v(t)$, puis $v^2(t)$ en fonction de $f(t)$.
 - b. Exprimer $v'(t)$ en fonction de $f(t)$ et de $f'(t)$.
 - c. En déduire que la fonction f est solution, sur $[0; +\infty[$, de l'équation différentielle (E) : $y' = \frac{g}{3}y + \frac{g}{36}$.
 - d. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
 - e. Déterminer $f(0)$, puis en déduire l'expression de la fonction f .
 - f. En déduire l'expression de la fonction v .
- 2) Étudier la limite de v en $+\infty$ et interpréter le résultat.
- 3) À quel instant t , la vitesse a-t-elle perdu la moitié de sa valeur initiale ? Arrondir à l'unité.

Exercice 19 [Ch-Mo-Ra-Ca-Co]

Dans un environnement où la température est maintenue à zéro degré Celsius, la vitesse de refroidissement d'un objet est proportionnelle à la température de cet objet. Dans une pièce où la température est maintenue à 0°C , un objet chauffé à 100°C voit sa température chuter à 45°C en dix minutes.

En combien de temps la température de cet objet atteindra-t-elle 25°C ? Arrondir à la minute.

Équations différentielles $y' = ay + f$ ou $s'y$ ramenant**Exercice 20** [Ch-Mo-Ra-Ca-Co] D'après Bac Amérique du Nord, juin 2025

On considère l'équation différentielle (E) : $y + y' = (2x + 3)e^{-x}$ où y est une fonction de la variable réelle x .

- 1) Montrer que la fonction f_0 définie pour tout nombre réel x par $f_0(x) = (x^2 + 3x)e^{-x}$ est une solution particulière de l'équation différentielle (E).
- 2) Résoudre l'équation différentielle (E₀) : $y + y' = 0$.
- 3) Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E).
- 4) Déterminer l'expression de la fonction g solution de l'équation différentielle (E) vérifiant $g(0) = 1$.
- 5) Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E) dont la courbe admet exactement deux points d'inflexion.

Exercice 21 [Ra-Ca-Co]

On considère l'équation différentielle (E) : $y' + 4y = xe^{-x}$.

- 1) Déterminer des nombres réels a et b tels que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (ax + b)e^{-x}$ soit solution de (E).
- 2) Démontrer qu'une fonction f est solution de (E) si, et seulement si, $f - g$ est solution de (E₀) : $y' + 4y = 0$.
- 3) Déterminer l'ensemble des solutions de (E₀).
- 4) En déduire l'ensemble des solutions de (E).
- 5) Déterminer la solution f de (E) telle que $f(1) = 0$.

Exercice 22 [Ra-Ca-Co]

On considère l'équation différentielle (E) : $y' - 2y = \frac{-2}{1 + e^{-2x}}$.

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{2x}g(x)$ où g est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

- 1) Démontrer que f est solution de (E) si, et seulement si, pour tout réel x , $g'(x) = \frac{-2e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$.
- 2) En déduire l'ensemble des solutions de (E).

Exercice 23 [Ra-Ca-Co]

Dans un secteur observé d'une région donnée, un prédateur empêche la trop forte croissance d'une population de petits rongeurs. $u(t)$ est le nombre de rongeurs, en centaine, vivants au temps t , en année, dans cette région.

On admet que la fonction u vérifie, pour tout réel $t \geq 0$ (E₁) :
$$\begin{cases} u'(t) = \frac{u(t)}{4} - \frac{(u(t))^2}{12} \\ u(0) = 1 \end{cases}$$

- 1) On suppose que pour tout réel positif t , on a $u(t) > 0$.

h est la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $h = \frac{1}{u}$.

Démontrer que la fonction u vérifie (E₁) si, et seulement si, la fonction h vérifie (E₂) :
$$\begin{cases} h'(t) = \frac{-1}{4}h(t) + \frac{1}{12} \\ h(0) = 1 \end{cases}$$

- 2) Donner les solutions de l'équation différentielle $y' = \frac{-1}{4}y + \frac{1}{12}$ et en déduire l'expression de h , puis celle de u .
- 3) a. Selon ce modèle, comment évolue la population de rongeurs en fonction du temps ?
b. Selon ce modèle, comment se comporte la taille de la population étudiée à long terme ?

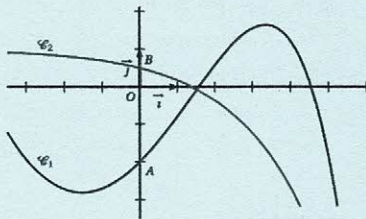
Exercice 24 [Ch-Re-Ra-Ca-Co]

f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

Son tableau de variations est donné ci-dessous, où a et b désignent deux nombres réels.

x	$-\infty$	a	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	b	$-\infty$

- 1) Déterminer le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x .
- 2) Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on a tracé deux courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.
Elles coupent l'axe des ordonnées aux points A et B de coordonnées -2 et $\frac{1}{2}$ respectivement.
L'une de ces courbes est la courbe représentative de la fonction dérivée f' de f et l'autre est la courbe représentative d'une primitive F de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
 - a. Attribuer à chaque courbe la fonction qu'elle représente. Justifier.
 - b. À l'aide des courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$, prouver que $1 < a < 2$ et $b > 0$.
- 3) Dans cette question, on admet que la fonction f est telle que pour tout réel x , $f(x) - 2f'(x) = x$.
 - a. Déterminer une fonction affine g telle que pour tout réel x , $g(x) - 2g'(x) = x$.
 - b. Démontrer que la fonction $f - g$ est une solution de l'équation différentielle $y' = \frac{1}{2}y$.
 - c. Résoudre cette équation différentielle et en déduire l'existence d'un réel k tel que :
pour tout réel x , $f(x) = ke^{\frac{1}{2}x} + x + 2$.
 - d. En utilisant les coordonnées des points A et B, déterminer les fonctions f et F ainsi que les réels a et b .



Exercice 25 Résolution approchée d'une équation différentielle du type $y' = f$ par la méthode d'Euler

f est la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$.

On se propose de déterminer la solution F de l'équation différentielle $y' = f$ telle que $F(0) = 0$.

Mais on ne connaît pas de primitive de f sur $[0; +\infty[$. C'est pourquoi on va utiliser une méthode d'approximation, nommée **méthode d'Euler**, qui consiste à construire une courbe proche de la courbe de la solution F cherchée.

Principe de la méthode d'Euler :

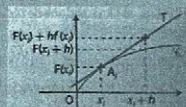
A_i est le point d'abscisse $x_i \geq 0$ de la courbe représentative $\mathcal{C}$ de F dans un repère.

Alors, la tangente T à $\mathcal{C}$ en A_i est proche de $\mathcal{C}$ au voisinage de A_i .

Son équation est : $y = F'(x_i)(x - x_i) + F(x_i)$.

Autrement dit, pour tout réel $h > 0$ assez petit :

$$F(x_i + h) \approx F(x_i) + hF'(x_i), \text{ soit } F(x_i + h) \approx F(x_i) + hf(x_i).$$

• **Premiers calculs**

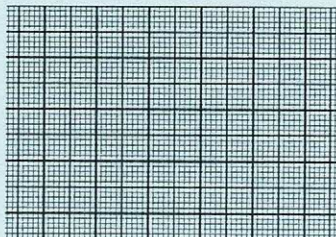
On choisit $h = 0,1$ et on définit la suite (x_n) sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} x_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = x_n + 0,1 \end{cases}$.

On sait que $F(0) = 0$, on pose $y_0 = 0$ et on définit la suite (y_n) par : $\forall n \in \mathbb{N}, y_n = F(x_n)$.

1) Compléter le tableau ci-dessous :

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0									
y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9

2) Dans le repère ci-contre, placer les points $A_n(x_n; y_n)$.

• **Automatisation des calculs**

On se propose de placer la suite des points A_n à l'aide d'un programme.

3) Compléter la fonction « solution » écrite en langage Python, qui a pour paramètres le nombre N de points à placer et le pas h , et qui affiche les N premiers points obtenus par la méthode d'Euler.

4) Saisir le programme et l'exécuter avec $N = 100$ et $h = 0,1$.

```
from pylab import *
def f(x):
    y=1/(1+x**2)
    return y
def solution(N,h):
    x=0
    y=0
    plot(x,y, 'r.')
    for i in range(1,N):
        y=
        x=
        plot(x,y, 'r.')
    show()
    return
```

Leonhard Euler a présenté cette méthode d'approximation en 1768. 250 ans plus tard, elle est encore utilisée, en particulier, lorsqu'on ne connaît f que par des données mesurées.

Des avancées plus récentes ont été présentées en 2018 par Cristian Lübbich lors du congrès International des Mathématiciens à Rio.

Exercice 26 [Re-Ra-Ca-Co]

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

On s'intéresse aux fonctions dérivables sur $[0; +\infty[$, solutions sur $[0; +\infty[$ de l'équation différentielle (E) : $y' = 4 - y^2$.

On admet qu'il existe une unique fonction f solution de cette équation différentielle vérifiant $f(0) = 0$.

Partie A : étude d'une suite

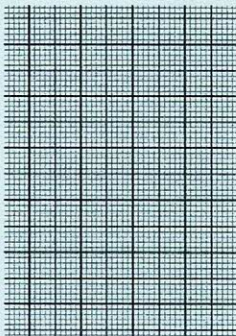
Afin d'obtenir une approximation de la courbe représentative de la fonction f , on utilise la **méthode itérative d'Euler** avec un pas égal à 0,2. On pose alors, $x_0 = 0$ et pour tout entier naturel n , $x_{n+1} = x_n + 0,2$.

- On suppose que pour tout réel a de l'intervalle $[0; +\infty[$, $f(a + 0,2)$ est très proche de $0,2f'(a) + f(a)$.
Montrer que pour tout entier naturel n , $f(x_{n+1})$ est très proche de $-0,2f(x_n)^2 + f(x_n) + 0,8$.
On obtient ainsi une suite de points (M_n) , d'abscisse x_n et d'ordonnée y_n où $y_0 = 0$
et pour tout entier naturel n , $y_{n+1} = -0,2y_n^2 + y_n + 0,8$.

- Les coordonnées des premiers points sont consignées dans le tableau ci-dessous. Compléter ce tableau.

n	0	1	2	3	4	5	6	7
x_n	0	0,2	0,4					
y_n	0	0,800 0	1,472 0					

- Placer dans un repère orthonormé d'unité 5 cm les points M_n pour n entier naturel inférieur ou égal à 7.
- D'après ce graphique, que peut-on conjecturer sur le sens de variation de la suite (y_n) et sur sa convergence ?
- Pour tout réel x , on pose $p(x) = -0,2x^2 + x + 0,8$.
Montrer que si $x \in [0; 2]$, alors $p(x) \in [0; 2]$.
- Démontrer que pour tout entier naturel n , $0 \leq y_n \leq 2$.
- Étudier le sens de variation de la suite (y_n) .
- Déduire des questions précédentes que la suite (y_n) est convergente et déterminer sa limite.

**Partie B : étude d'une fonction**

g est la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $g(x) = 2 \left(\frac{e^{4x} - 1}{e^{4x} + 1} \right)$ et $\mathcal{C}$ est sa courbe représentative.

- Montrer que la fonction g est solution de l'équation différentielle (E) et vérifie $g(0) = 0$.
- Montrer que $\mathcal{C}$ admet une asymptote Δ dont on donnera une équation.
- Étudier les variations de la fonction g sur $[0; +\infty[$.
- Déterminer l'abscisse α du point d'intersection de Δ et de la tangente à $\mathcal{C}$ à l'origine du repère.